Określanie niepewności pomiaru

(Materiały do ćwiczeń laboratoryjnych z przedmiotu Materiałoznawstwo
na wydziale Górnictwa i Geoinżynierii)

1. Wprowadzenie

Pomiar jest to zbiór czynności mających na celu wyznaczenie wartości wielkości mierzonej. Pomiary w laboratorium można podzielić na pomiary wielkości prostych i złożonych. Pomiar wielkości prostych polega na bezpośrednim pomiarze danej cechy, np. masa, długość, twardość, itp. Pomiar wielkości złożonych polega na wyznaczaniu danej cechy na podstawie co najmniej dwóch pomiarów wielkości prostych, np. wyznaczenie gęstości, wytrzymałości na ściskanie. W trakcie pomiaru uzyskujemy wartości różniące się od przewidywanych w teorii (w rzeczywistości wartości wielkości mierzalnej zwykle nie są znane). Źródłem takich rozbieżności są niedokładności: osoby wykonującej eksperyment, przyrządów pomiarowych oraz obiektów mierzonych. Wynik pomiaru jest zawsze obarczony błędem.

Rodzaje błędów

Błąd pomiaru – różnica pomiędzy wartością zmierzoną x_i a rzeczywistą x_0

Błąd bezwzględny pojedynczego pomiaru

$$\Delta x_i = x_i - x_0 \tag{1}$$

Błąd względny

$$\delta = \frac{\Delta x_i}{x_0} \tag{2}$$

Wzajemne relacje pomiędzy wartością rzeczywistą a wartościami pojedynczych pomiarów uzyskanych w badaniach wyróżniamy trzy rodzaje błędu:

Błąd przypadkowy – rozrzut wyników pomiaru wokół wartości rzeczywistej. Wynik kolejnego pomiaru jest inny, przy czym występuje w przybliżeniu taka sama szansa uzyskania wyników większych jak i mniejszych od x_0. Przyczynami błędu przypadkowego niedokładność i przypadkowość działania ludzkich zmysłów.

Błąd systematyczny – powstaje gdy przy powtarzaniu pomiaru występuje ta sama różnica pomiędzy wartościami zmierzonymi a wartością rzeczywistą, natomiast rozrzut wyników poszczególnych pomiarów jest niewielki lub nie występuje w ogóle.

Błąd gruby – duża różnica wartości pomiędzy wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą. Przyczyna powstawania błędów grubych jest nieumiejętność użycia danego przyrządu, pomyłek przy odczycie i zapisie wyników. Z przypadkiem występowania błędu grubego mamy do czynienia wówczas, gdy jeden z wyników odbiega znacząco od całej serii.

2. Błąd pomiaru a niepewność pomiaru

Błąd pomiaru wyrażony zależnością (1) nie stanowi miary dokładności pomiarowej, gdyż podobny pomiar wykonany innym przyrządem, w innym czasie i miejscu da inna wartość. Zatem Δx_i jest liczbą losową. Ponadto w praktyce nieznane są wartości rzeczywistych wielkości mierzonych i w związku z tym szacowane są niepewności pomiarowe wynikające ze statystycznego rozrzutu wyników. Przewodnik [1] podaje następująca definicję:

Niepewność pomiaru jest związanym z rezultatem pomiaru parametrem charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej.

Niepewność *u* posiada taki sam wymiar jak wymiar wielkości mierzonej. Niepewność można zapisać w potraci: *u* lub *u(x),* lub *u(stężenie NaCl)*

Niepewność względna to stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej, jest wielkości bezwymiarową lub może być wyrażona w %

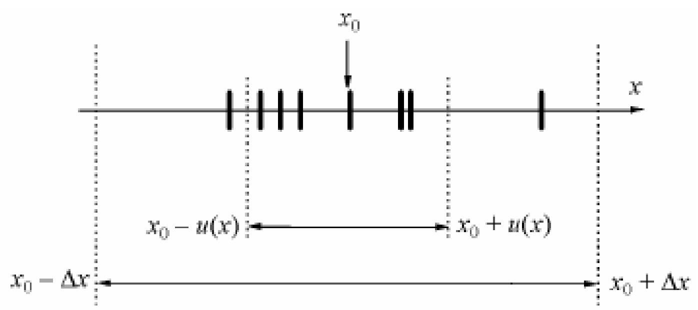
$$\frac{\mathrm{u(x)}}{\mathrm{x}}$$

Niepewność w znaczeniu jakościowym związana jest z dokładnością pomiaru. Im pomiar jest dokładniejszy, tym niepewność jest mniejsza.

Do określenie niepewności pomiaru bezpośredniego stosuje się dwie miary (rys. 1):

- niepewność standardową *u(x),*

- niepewność graniczną *Δx*.



Rys. 1. Schemat niepewności standardowej *u(x) i niepewności granicznej Δx* [2]

Najpowszechniej stosowaną jest niepewność **standardowa *u(x),*** która polega na oszacowaniu odchylenia standardowego. Oznacza to, że rezultat pomiaru jest zmienną losową x_i, której rozrzut wokół wartości średniej charakteryzuje parametr zwany odchyleniem standardowym (3).

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}} \tag{3}$$

Nie znamy dokładnej wartości odchylenia standardowego i w związku z tym niepewność standardowa jest jego niezbyt dokładnym oszacowaniem (estymatorem, oceną).

Niepewność graniczna (często zwana maksymalną) *Δx*, - dla niej określany jest przedział (4) wszystkich wyników pomiarów wykonanych aktualnie i w przyszłości.

$$x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x \tag{4}$$

Niepewność ta jest miarą deterministyczną, gdyż zakłada się, że wartość prawdziwa na pewno zawarta jest w tym przedziale. Aktualnie zaleca się aby niepewność graniczną zamieniać na niepewność standardową wg wzoru (5):

$$u(x) = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\sqrt{3}} \tag{5}$$

3. Rodzaje oceny niepewności standardowej

3.1. Ocena niepewności typu A

Jest to metoda obliczania niepewności drogą analizy statystycznej serii pojedynczych wyników pomiarów. Metodę tę stosuje się w przypadku, gdy rozpatrywany pomiar danej wielkości wykonywany jest wielokrotnie. W rezultacie pomiaru otrzymuje się serię (zbiór) pojedynczych obserwacji dotyczących mierzonej wielkości. Wskutek różnych wpływów towarzyszących pomiarowi, brak jest pełnej powtarzalności wyników lecz występuje ich pewien rozkład (rozrzut). Powoduje to, że otrzymany wynik jest obarczony określoną niepewnością. W przypadku serii pomiarów, jako miarę tej niepewności zaleca się stosowanie odchylenia standardowego wartości eksperymentalnej średniej z pomiaru. Jako miary niepewności można też używać wariancji eksperymentalnej średniej nazywanej wariancją typu A. Chętniej używane jest jednak odchylenie standardowe średniej jako wielkość mająca ten sam wymiar fizyczny co wielkość mierzona będąc przez to łatwiejszą do interpretacji.

Może być stosowana w pomiarach, w których występuje błąd przypadkowy oraz wymagana jest duża liczba powtórzeń pomiarów.

Zwykle za wynik pomiaru *x* przyjmujemy wartość średniej arytmetycznej

$$x = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \tag{6}$$

Miarą rozrzutu wyników pomiaru jest wielkość zwana estymatorem odchylenia standardowego

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{7}$$

Ilościowo estymator odchylenia standardowego średniej $s_{\overline{x}}$ jest $\sqrt{n}$ mniejszy od estymatora s_x.

$$s_{\overline{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \tag{8}$$

Za wynik pomiaru przyjmujemy średnią. W związku z tym niepewnością pomiaru u(x) będzie po uwzględnieniu (7) i (8) następująca zależność:

$$u(x) \equiv s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{9}$$

Powtarzanie pomiaru przynosi zmniejszenie niepewności spowodowanej bledem przypadkowym. Zaleca sie wykonanie 5 – 10 pomiarów [2].

3.2. Ocena niepewności typu B

Metoda obliczania niepewności typu B polega na zastosowaniu metod innych niż analiza statystyczna serii pojedynczych obserwacji. Najczęściej przypadek ten dotyczy sytuacji gdy wykonywany jest pojedynczy pomiar i chcemy ocenić jego niepewność. W takim przypadku do oceny niepewności wykorzystuje się informacje dotyczące zastosowanej metody pomiarowej, klasy dokładności przyrządu pomiarowego, itp. W szczególności źródłem danych do oceny niepewności standardowej obserwacji mogą być:

- poprzednie podobne dane pomiarowe, opracowane statystycznie i rozpoznane jakościowo,
- posiadane doświadczenie pomiarowe i znajomość badanych zjawisk,
- specyfikacje wytwórców przyrządów pomiarowych stosowanych do pomiaru,
- dane uzyskane z wzorcowania lub certyfikacji (przyrządów lub metod pomiarowych),
- niepewności przypisane danym odniesienia zaczerpniętym z literatury.

Najczęściej ocena typu B dotyczy określania niepewności wynikającej ze skończonej dokładności przyrządu.

4. Niepewność wielkości złożonej – prawo przenoszenia niepewności

W wielu przypadkach wielkość fizyczna nie jest mierzona bezpośrednio ale jest określana na podstawie innych wielkości $x_1, x_2,...x_n$ za pomocą funkcji zapisanej w ogólnej postaci:

$$y = f\left(x_1, x_2, ...x_n\right) \tag{10}$$

Niepewności $u(x_1)$ .... $u(x_n)$ wielkości mierzonych bezpośrednio przenoszą sie na wielkość obliczaną y powodując, że jest on obarczona skończoną niepewnością. Metody obliczania niepewności wielkości y nazywają się ***prawem przenaszania niepewności***.

Przykładem wielkości mierzonej pośrednio może być objętość bryły geometrycznej w postaci walca gdzie dla jej obliczenia potrzebny jest pomiar średnicy i wysokości. Innym przykładem może być pomiar gęstości ciała wyznaczanej przez pomiar masy (za pomocą ważenia) i objętości. W każdym z takich przypadków na niepewność wielkości końcowej (wyznaczanej pośrednio) składają się niepewności każdego z pomiarów bezpośrednich.

4.1. Funkcja jednej zmiennej

Niepewność $u(x)$ jest mała w porównaniu z wartością mierzoną x, zatem niepewność $u(y)$ obliczyć można jako wartość bezwzględną z iloczynu pochodnej funkcji i niepewności $u(x)$

$$u(y) = \left|\frac{dy}{dx} \cdot u(x)\right| \tag{11}$$

Przykład na podstawie [2]: *Niepewność objętości kuli o znanej średnicy*

Zmierzyliśmy średnicę *D* stalowej kulki suwmiarką, otrzymując wartość *D* = 2,45 mm z niepewnością *u*(*D*) = 0,05 mm. Objętość kuli obliczamy z wzoru (4/3)π r^3 = (π /6) D^3 = 7,70 mm^3. Niepewność objętości kuli wynosi:

$$u(V) = \frac{d}{dD}\left(\frac{\pi}{6}D^3\right)u(D) = \frac{\pi}{2}D^2 \cdot u(D) = \frac{3{,}1416}{2}(2{,}45\ mm)^2 \cdot 0{,}05mm = 0{,}47mm^3$$

4.2. Funkcja wielu zmiennych

Dla funkcji wielu zmiennych obliczamy za pomocą wzoru (11) różniczki cząstkowe dla kolejnych zmiennych x_1 ... x_n ... i tworzymy z nich sumę geometryczną.

$$u(y) = \sqrt{\sum \left[\frac{dy}{dx} \cdot u(x_n)\right]^2} \tag{12}$$

Obliczoną wartość niepewności funkcji *y* nazywamy ***niepewnością złożoną.*** Najprostszy przypadek prawa przenoszenia niepewności (bezwzględnej) zachodzi, gdy funkcja *y* jest sumą lub różnicą dowolnej liczby składników. Pochodne cząstkowe *dy/dx* są równe jedności i w rezultacie niepewność złożona jest sumą geometryczną niepewności poszczególnych składników:

$$u(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + ... + u^2(x_n)} \tag{13}$$

5. Wyznaczanie składowych niepewności (wielkości wejściowych)

5.1. Niepewność wynikająca ze stosowanych wzorców (materiałów odniesienia)

Do wzorcowania wyposażenia pomiarowego i badawczego stosuje się wzorce lub certyfikowanym materiały odniesienia (CRM) o odpowiedniej jakości metrologicznej. W świadectwie wzorcowania lub innym certyfikacie zwykle znajduje się zapis:

$$X = x \pm U(x) \tag{14}$$

U(x) – niepewność rozszerzona

Niepewność standardowa materiału odniesienia (wzorca) *u*(*x*) będzie równa:

$$u(x_1) = \frac{U(x)}{k} \tag{15}$$

5.2. Niepewność wynikająca z klasy stosowanych przyrządów pomiarowych

Niepewność tego typu wynika ze skończonej zdolności pomiarowych przyrządu. Zazwyczaj każdy przyrząd pomiarowy posiada określoną klasę *K*, która jest powiązana z dokładnością wzorcowania fabrycznego przyrządu $\Delta_K x$ i zakresem pomiarowym tego przyrządu *Z*, zależnością:

$$\Delta_K x = \frac{K \cdot Z}{100} \tag{16}$$

Jeżeli przyjmiemy, że obliczona ze wzoru (16) dokładność wskazań przyrządu pomiarowego podlega rozkładowi prostokątnemu, to niepewność standardowa wynikająca z klasy przyrządu pomiarowego *u(x)* będzie równa:

$$u(x_2) = \frac{\Delta_K x}{2 \cdot \sqrt{3}} \tag{17}$$

Jeżeli producent przyrządu pomiarowego podaje w specyfikacji, że błąd wskazań zmienia się w zakresie od wartości *–a* do *a* (w domyśle z wartością oczekiwana równą 0), to niepewność standardowa, przy założeniu rozkładu prostokątnego wspomnianego błędu, wskazań tego przyrządu będzie równa:

$$u(x_2) = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{18}$$

5.3. Niepewność wynikająca ze zdolności rozdzielczej przyrządów pomiarowych

Jeżeli w miernikach z odczytem cyfrowym lub analogowym „elementarna działka" wynosi *a* jednostek, to niepewność standardowa $u(x)$ wynikająca ze wskazań tego miernika cyfrowego będzie równa:

$$u(x_3) = \frac{a}{\sqrt{12}} \tag{19}$$

5.4. Niepewność wynikająca z precyzji metody badawczej

Jeżeli w warunkach powtarzalności (tzn. pomiar tego samego obiektu, przez tego samego analityka, tym samym przyrządem pomiarowym bez kalibracji pomiędzy kolejnymi pomiarami, w możliwie jak najkrótszym czasie) wykonamy n pomiarów tej samej wielkości to uzyskamy n wyników x_i, które będą się różniły pomiędzy sobą. Na podstawie uzyskanych wyników możemy wyznaczyć niepewność standardową precyzji pomiaru $u(x)$ wg następującego wzoru:

$$u(x_4) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{m \cdot (n-1)}} \tag{20}$$

m – liczba powtórzeń podczas rutynowego badania (zazwyczaj m=2).

5.5. Niepewność wynikająca z obciążenia metody badawczej

Jeżeli dysponujemy certyfikowanym materiałem odniesienia lub wzorcem, który w certyfikacie lub świadectwie wzorcowania ma podaną wartość nominalną badanej wielkości wraz z niepewnością w postaci np.:

$$X = CRM \pm u(CRM) \tag{21}$$

gdzie: *CRM* – wielkość certyfikowana,

$u(CRM)$ – niepewność standardowa wielkości certyfikowanej.

Po wykonaniu serii *n* pomiarów certyfikowanego materiału odniesienia możemy obliczyć średnią wartość uzyskaną w wyniku pomiaru $\overline{x}_{CRM}$ ze wzoru:

$$\overline{x}_{CRM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{CRM-i}}{n} \tag{22}$$

x_{CRM-i} – wynik *i*-tego pomiaru certyfikowanego materiału odniesienia

Przedstawiony sposób postępowania pozwala na obliczenie poprawki dodawanej do uzyskanego wyniku *Δ*:

$$\Delta = CRM - \overline{x}_{CRM} \tag{23}$$

Następnym etapem jest wyznaczenie niepewności standardowej wyniku $u(\overline{x}_{CRM})$ oraz niepewności standardowej poprawki $u(\Delta)$:

$$u(\overline{x_5}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{CRM-i} - \overline{x}_{CRM}\right)^2}{n(n-1)}} \tag{24}$$

$$u(\Delta) = \sqrt{u^2(CRM) + u^2(\overline{x}_{CRM})} \tag{25}$$

7. Wyznaczenie niepewności rozszerzonej

Przewodnik [1] wprowadza pojęcie ***niepewności rozszerzonej***. Jest to zwiększona wartość niepewność standardowej, obliczona tak aby w przedziale (y – $U(y)$, y + $U(y)$) znalazła się *przeważająca część* wyników pomiaru. Wartość *U* obliczamy mnożąc niepewność złożoną przez bezwymiarowy ***współczynnik rozszerzenia k***

$$U(y) = \pm k \cdot u(y) \tag{26}$$

Zgodnie z międzynarodową praktyką do obliczenia U przyjmuje się najczęściej umowną wartość k = 2.. przy założeniu około 95% poziomu ufności i rozkładu normalnego wielkości badanej. Wzór (26) przyjmuje postać:

$$U(y) = \pm 2 \cdot u(y) \tag{27}$$

8. Zapis niepewności pomiaru

Na przekładzie przedstawiono zalecane formy zapisu niepewności rozszerzonej.

- zapis słowny: gęstość wynosi 2,353 g/cm^3 z niepewnością rozszerzoną 0,026 g/cm^3
- zapis przy użyciu symboli: ρ = 2,353 g/cm^3; U(ρ) = 0,026 g/cm^3
- zapis skrócony: ρ = (2,353 ± 0,026) g/cm^3

Zasady zapisu niepewności zalecane przez *Przewodnik* [1].

A. Niepewność zapisujemy z dokładnością dwu cyfr znaczących. Przy zaokrąglaniu do dwu cyfr znaczących niepewność graniczna spowodowana zaokrąglaniem wynosi od 5% do 0,5% (odpowiednio, dla cyfr 10 i 99). Taka dokładność wystarcza, gdyż ocena niepewności jest bardziej niedokładna.

B. Wartość mierzoną zaokrąglamy do tego samego miejsca, co niepewność. Jeżeli ostatnią cyfrą wyniku jest zero, należy ją pozostawić, jako cyfrę znaczącą.

C. Przy zapisach skróconych symbol ± należy stosować do niepewności rozszerzonej, zapis z użyciem nawiasów do niepewności standardowej (np. ρ = (2,353(13) g/cm^3).

Literatura:

1. Praca zbiorowa: Wyrażanie niepewności pomiaru - przewodnik. Główny Urząd Miar, Warszawa, 1999.

2. Zięba A.: PRACOWNIA FIZYCZNA Wydziału Fizyki i Techniki Jądrowej AGH, Część I, Wydanie trzecie zmienione. Wydawnictwa AGH, Kraków 2002.

Na podstawie ww. literatury opracowała dr inż. Joanna Hydzik-Wiśniewska